明新科技大學校內專題研究計畫成果報告

跳躍擴散隨機波動模型的衍生性商品定價與避險策略研究
Pricing and Hedging Derivatives in the Jump-Diffusion Stochastic Volatility Models

計畫類別：□任務型計畫　□整合型計畫　■個人計畫

計畫編號：MUST-97-財金-01

執行期間：97 年 1 月 1 日至 97 年 9 月 30 日

計畫主持人：陳佳信

處理方式：公開於校網頁

執行單位：管理學院財務金融系

中 華 民 國 97 年 10 月 20 日

跳躍擴散隨機波動模型的衍生性商品定價與避險策略

Pricing and Hedging Derivatives in the Jump-Diffusion Stochastic Volatility Models

中文摘要

波動率(volatility)在金融市場中具有舉足輕重的地位,它不僅是風險控管的重要衡量工具,也是資產評價不可或缺的因素。我們研究在資產價格報酬及其波動率可能跳躍不完備市場的衍生性商品定價和避險問題。首先探討在風險中立機率測度下,如何決定最適q等價鞅率測度$Q^{(q)}$，q=0，1，2，用其計算歐式選擇權(European option)的價格，並且討論在不同的$Q^{(q)}$機率測度下，對應到的最適避險策略。最後，利用程式模擬，比較不同$Q^{(q)}$機率測度下的歐式選擇權及變異數交換價格，以及各種避險策略下各自的避險效果優劣。

我們可以觀察到歐式買權在不同的機率測度$Q^{(q)}$下確實有些許的不同,且當q值越小，得到的買權價格會越小。而在不同的機率測度$Q^{(q)}$下對應的避險策略，透過模擬比較，亦可發現其避險效果的確優於 delta 避險

關鍵詞：跳躍擴散，隨機波動，Fourier 轉換，等價鞅測度，最佳化 q-測度，最小鞅測度，平均變異避險，最小熵測度

英文摘要：

We consider the problem of pricing and hedging a contingent claim, in an incomplete market where prices and volatility of traded assets can possibly undergo jumps. First we determine the optimal q measure $Q^{(q)}$. Then we use the optimal q measure to calculate the European call option price. Than we discuss about the optimal hedging strategy corresponding to different $Q^{(q)}$. We also run simulation to show difference of European call option prices under different $Q^{(q)}$ probability measures, and compare the different corresponding hedging strategies.

We can find some difference with European call option price under different $Q^{(q)}$ probability measures. As q smaller, European call price will be also smaller. And compare different hedging strategy with general delta hedge under different $Q^{(q)}$ probability measure, we can observe that it is really superior to delta hedge from simulation result.

Keywords：Jump diffusion, stochastic volatility, Fourier transform, affine jump diffusion process, equivalent martingale measure, q-optimal measure, mean-variance hedging, and minimal entropy measure.

目錄

一. 前言

波動率(volatility)在金融市場中具有舉足輕重的地位，它不僅是風險控管的重要衡量工具，也是資產評價不可或缺的因素。標的證券的波動率在選擇權的定價與避險策略中扮演關鍵的角色，在交易實務上甚至可稱選擇權的交易就是一種波動率的交易。在 1973 年 Black 和 Scholes 推導出著名的選擇權評價公式(後簡稱為 BS 模型) ，普遍被實務界用來計算選擇權的價格，在其公式中唯一不能直接由市場取得的參數就是波動率，通常就利用市場選擇權價格及其它可直接取得的參數，用 BS 評價公式反推回來的隱函波動率(implied volatility)來對不同到期或不同履約價選擇權價格做為高低比較的基準，這顯示波動率在 BS 模型中的重要性，但也反應出其限制不正確。因為 BS 模型背後具有許多嚴謹的假設和實際市場不符，例如假設標的證券的波動率是常數，這和眾多對股價或指數選擇權市場實證觀察不符合，隱函波動率有所謂波動微笑(volatility smile)現象(Rubinstein1985)，造成 BS 模型的選擇權價值和市場價值不一致的現象，文獻上大多認為 BS 假設股價動態過於嚴苛，而和實際股價標的資產的行為有些偏離，這種錯誤價格現象會造成投資人利用選擇權避險面臨模型錯誤的風險，無法有效的規避風險達到風險管理目的。這促成後來對於 BS 模型很多的推廣，例如 Merton's (1976) 引進跳躍擴散(jump diffusion)的模型。另外固定常數的波動率修改為隨機波動率，如 Heston's (1993)的隨機波動模型，利用了 Cox, Ingersoll, and Ross (1985) (CIR) 的 square-root 模型來描繪 variance 的變化；還有對標的證券的價格走勢引進了跳躍擴散(jump diffusion)的不連續型式，甚至波動率也同時是跳躍擴散的模型。

Heston (1993)是最先使用 Fourier transform 來對隨機波動下的選擇選做定價，其 affine square-root 波動模型已被實務界廣為運用。Bates (1996)延伸 Fourier inversion method 發展出結合隨機波動與跳躍過程美式選擇權的定價模型。Scott (1997)亦使用 the Fourier Inversion formula 的機率分配函數導出在有隨機波動以及利率跳躍模型下的歐式選擇權。Scott 發現 S&P500 指數選擇權，利率波動，跟股價報酬與波動呈現負向關係而且股價報酬與利率對選擇權的價值有重大的影響。特別是對於長期選擇權的價值來說。Bakshi, Cao, and Chen (1997)允許波動、利率以及跳躍是隨機的條件下導出選擇權模型，他們研究顯示隨機波動跳躍(SVJ)(只有價格跳躍)的模型有較低的定價錯誤;Bates(2000)的比較研究有類似結果。Duffie, Pan, and Singleton (2000)提出較廣泛的 affine 跳躍擴散模型，也運用 Fourier transform 及特徵函數(characteristic function)的技巧來做定價計算，他們的文章廣為後續研究所引用及廣為應用，因其整理提出較廣泛的 affine 跳躍擴散模型，包括了許多模型為特例及可運用的 Fourier 轉換計算，他們實證比較了沒有跳躍的隨機波動模型(SV)、隨機波動只有價格跳躍(SVJ)的模型及隨機波動在價格及波動可同時且相關連跳躍(stochastic volatility with simultaneous and correlated jumps in price and volatility) (SVJJ)的模型，他們發覺 SVJJ 的模型較符合實證，大體上來說，加入隨機波動以及跳躍對於定價以及避險是很重要的，然而，所有的模型都呈現 misspecification 的現象。

二. 研究目的

以上及許多相關研究比較重視風險中立(risk-neutral)下模型的直接描繪，雖給出價格封閉解(close solution)公式，但因市場不完備(incomplete)性，等價鞅測度(equivalently martingale measure)(EMM)並不唯一，其與現實機率測度(physical probability measure)之間的變換，等價鞅選擇、衍生性商品定價(pricing)不唯一及避險(hedging)策略之關聯性等等的問題，在理論及實務應用上皆有其重要性，但除了沒跳躍的隨機波動模型外[見Henderson, Hobson, Howison, Kluge (2005)]，並未完全被深入討論。

由Delbaen和Schachermayer(1994)的一般性結果，在眾多任意等價鞅測度之下，不可套利的定價是可行的，但當等價鞅測度不唯一，需要考慮更多適當條件以從眾多等價鞅測度挑選合適者來應用於定價計算，這不是一個容易的問題，特別定經由Eberlein和Jacod (1997)的研究顯示，經由挑選適當的等價鞅測度，可以得到歐式衍生性商品的任一可能不可套利價格。近年來很多不同方法被提出，在不完備市場模型下，不只機率重要，對風險的態度也重要，不同評估風險的方式帶出不同的避險方法，例如superhedging，utility maximization，mean-variance hedging，quadratic hedging，global or local risk minimization等等。而這些又決定了等價鞅測度的挑選，亦即衍生性商品價格的決定。

事實上，跳躍擴散模型是個多維的半鞅(semimartingale)模型，Jacod and Shiryaev (1987)介紹了半鞅的特徵(characteristics)型式，並用其來表示機率測度轉換(probability measure transformation)時的密度(density). Shiryaev (1999), Kallsen (2000) 得到使機率測度為等價鞅(EMM)必要等式，但一般這些等式不容易求解。另外市場不完備(incomplete)性的問題，存在很多等價鞅(EMM)測度，所以有很多由之對應取條件期望值計算的不同衍生商品價格，也有不同選取最佳化(optimal)等價鞅的方法來定價，例如 Follmer and Schweizer (1991) 使用 minimal martingale measure，Schweizer (1995, 1996) 引用 variance optimal measure ，Gerber and Shiu (1994)及 Kallsen and Shiryaev (2002) 發展 Esscher transform，另外 minimal relative entropy 在 Fritelli (2000)中被完整討論，較一般化的最大效用(utility maximization)方法由 Kallsen (1999, 2002)發展， 選取不同效用函數(utility function)可得到不同最佳化(optimal)等價鞅。

我們所要探討的主要內容，便是探討如何選定適當的等價鞅，並且對金

融商品進行定價以及避險。我們即在上述架構下，從一般的多維的半鞅模型，affine 跳躍擴散模型到較特殊的具跳躍隨機波動模型，或連續不跳躍隨機波動模型(如 Heston 的模型)，探討定價避險策略的一些問題: 研究證券價格報酬與波動行為，比較不同風險觀點所對應不同選取等價鞅方法，衍生性商品(如選擇權)的定價計算,如應用 Fourier transform 及特徵函數(characteristic function)的技巧，定價時不同避險策略與等價鞅選取的比較。

以下的研究，主要利用不完全市場的假設，在不同機率測度 $Q^{(q)}$ 下計算金融商品的價格。首先根據最適 q 測度的定義，在不同機率測度 $Q^{(q)}$ 下決定出適當的布朗運動移動項(drift term)，透過機率測度轉換，將模型轉換到最適的等價鞅。接下來在不同 $Q^{(q)}$ 機率模型下，分別計算出不同情況下的歐式買權(European call option)價格，比較不同機率測度 $Q^{(q)}$ 下價格的不同。並且考慮在各自的機率測度 $Q^{(q)}$ 下，利用其對應的適當避險策略，找出最適避險策略下應持有的股票單位及選擇權單位比例關係。最後，利用實證模擬，比較不同 $Q^{(q)}$ 機率測度下的定價、避險策略和避險效果的優劣等。

三. 研究方法

我們需要隨機積分(stochastic integration)和隨機計算(stochastic calculus) 來描述具跳躍隨機波動不完備市場的模型架構，Affine 跳躍擴散的多維半鞅過程提供了最適當的工具，我們用 Poisson 隨機測度來描述跳躍的位置和大小，相關於跳躍時點和大小的不同數量可用相對於此 Poisson 隨機測度的隨機積分來表示。

在市場模型中，存在等價鞅測度則不存在套利機會，若等價鞅測度(EMM)唯一存在，市場具完備性(completeness)，衍生性商品價格可唯一定價;在不完備市場，只考慮不可套利的觀點無法對衍生性商品定價，因有多個等價鞅測度所提供不同的風險中立價格，此時需要加入其它喜好條件假定來做最佳化選擇，機率及模型的樣式必需認真考慮，因這影響避險決策;對風險的態度也很重要，所以我考慮不同的避險觀點: 如最小 mean variance hedging，效用最大(utility maximization)…等等不同觀點，這將導出為定價目的而選擇等價鞅的不同方法。

在隨機波動模型下選擇權定價一般步驟如下:

(1). 描繪標的資產的變動行為，我們研究隨機波動的affine跳躍擴散的多維半鞅過程模型。

(2). 計算特徵函數。

(3). 計算選擇權價格的Fourier轉換並利用特徵函數表示出來。

(4). 計算之前Fourier轉換的inverse來導出選擇權價格。

以上計算特徵函數及 Fourier 轉換時和考慮不同避險觀點的等價鞅測度的選取有關，也是我們探討的主題。

底下考慮有跳躍項下的一般股價模型：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t, Y_t)[a_t^{(1)} dB_t + a_t^{(3)} dN_t^{(1)}]$$

$$dV_t = \mu_t^V dt + \sigma_t^{(1)}(t, Y_t)[a_t^{(1)} dB_t + a_t^{(2)} dZ_t^{(1)}] + \sigma_t^{(2)}(t, Y_t)[a_t^{(3)} dN_t^{(1)} + a_t^{(4)} dN_t^{(2)}] \tag{3.1}$$

其中 dB_t, dZ_t 為兩布朗運動項(Brownian Motion)，$dN_t^{(1)}, dN_t^{(2)}$ 為兩卜瓦松過程(Poisson process)，且需滿足 $\sigma_i \neq 0$，跳躍項振幅 $a_t^{(3)} > 0$， $B_t, Z_t, N_t^{(1)}, N_t^{(2)}$ 互相獨立等條件。

透過底下的機率測度轉換

$$M_{\mathrm{T}} \equiv \frac{dQ}{dP}$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\int_t^T -\beta_s^{(1)} dB_s - \frac{1}{2}\int_t^T (\beta_s^{(1)})^2 ds\right) \exp\left(\int_t^T -\beta_s^{(2)} dZ_s - \frac{1}{2}\int_t^T (\beta_s^{(2)})^2 ds\right) \\ &\cdot \exp\left(\int_t^T \ln(1+\beta_s^{(3)}) dN_s^{(1)} + \int_t^T \ln(1+\beta_s^{(4)}) dN_s^{(2)}\right) \\ &\cdot \exp\left(\int_t^T \gamma_s^{(1)}[\ln(1+\beta_s^{(3)}) - \beta_s^{(3)}] ds + \int_t^T \gamma_s^{(2)}[\ln(1+\beta_s^{(4)}) - \beta_s^{(4)}] ds\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

定義

$$\begin{aligned} dB_t^Q &= dB_t + \beta_t^{(1)} dt \\ dZ_t^Q &= dZ_t + \beta_t^{(2)} dt \\ d\mathrm{N}_t^{(1)^Q} &= d\mathrm{N}_t^{(1)} + \gamma_t^{(1)} \beta_t^{(3)} dt \\ d\mathrm{N}_t^{(2)^Q} &= d\mathrm{N}_t^{(2)} + \gamma_t^{(2)} \beta_t^{(4)} dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\beta_t^{(i)}$ 為機率測度 Q 之下布朗運動及卜瓦松過程轉換時的移動項(drift term)，$\gamma_t^{(i)}$ 則

為卜瓦松過程轉換下，針對移動項給定的強度函數(intensity function)。經過如此的機率測度Q轉換，股價過程將變成

$$\frac{dS_t}{S_t}=(\mu_t-\beta_t^{(1)}a_t^{(1)}\sigma(t,Y_t)-\gamma_t^{(1)}\beta_t^{(3)}a_t^{(3)}\sigma(t,Y_t))dt+\sigma(t,Y_t)[a_t^{(1)}dB_t^Q+a_t^{(3)}dN_t^{(1)^Q}] \tag{3.4}$$

其中為了使機率測度Q轉換為風險中立機率測度，則$\beta_t^{(1)},\beta_t^{(3)}$必須滿足

$$\mu_t-r_t+\beta_t^{(1)}a_t^{(1)}\sigma(t,Y_t)+\gamma_t^{(1)}\beta_t^{(3)}a_t^{(3)}\sigma(t,Y_t)=0 \tag{3.5}$$

轉換後的風險中立機率測度可以改寫成

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t}&=rdt+\sigma(t,Y_t)[a_t^{(1)}dB_t^Q+a_t^{(3)}dN_t^Q]\\
dV_t&=(\mu_t^V+\sigma_t^{(1)}[a_t^{(1)}\beta_t^{(1)}+\gamma_t^{(1)}\beta_t^{(3)}a_t^{(3)}+\sigma_t^{(2)}[a_t^{(2)}\beta_t^{(2)}+\gamma_t^{(2)}\beta_t^{(4)}a_t^{(4)}])dt\\
&\quad+\sigma_t^{(1)}[a_t^{(1)}dB_t^Q+a_t^{(3)}dZ_t^Q]+\sigma_t^{(2)}[a_t^{(2)}dB_t^Q+a_t^{(4)}dZ_t^Q]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

如此的機率測度轉換下，僅$\beta_t^{(1)},\beta_t^{(3)}$受到某些限制條件，$\beta_t^{(2)},\beta_t^{(4)}$則為可任意選取的參數。應該如何選取適當的$\beta_t^{(2)},\beta_t^{(4)}$，建立合適的風險中立定價模型，在底下將有更詳盡的探討。

四. 結果與討論

底下分段對本研究結果做一介紹

- **最適 q 測度** (q-optimal probability measure)

存在兩機率測度P,Q，Grandits 等人(1998)定義

$$H_q(P,Q)=E\{\frac{q}{q-1}(M_T)^q\},\ \text{if}\quad q\in R\setminus\{0,1\} \tag{4.1}$$

$$H_q(P,Q)=E\{(-1)^{1+q}M_T^q\ln(M_T)\},\quad if\quad q\in\{0,1\} \tag{4.2}$$

其中 $M_T=\dfrac{dQ}{dP}$。若存在一機率測度 $Q^{(q)}$，滿足 $\min H_q(P,Q)$，則稱如此的機率測度為最適 q 測度(q -optimal probability measure)”。

在最適 q 測度中，$q=0,1,2$ 時各自具有其經濟上的意義：當 $q=0$ 時，$Q^{(0)}$ 稱為最小鞅測度(MMM, minimal martingale measure)，此機率測度必須滿足 $\min H_{(0)}(P,Q)$ 的條件，其中 $H_{(0)}(P,Q)$ 為

$$H_{(0)}(P,Q)=E\{-\ln(M_T)\}=E\{-\ln(\frac{dQ^{(0)}}{dP})\} \tag{4.3}$$

在 $Q^{(0)}$ 機率測度之下，所對應的避險方式稱為 locally risk-minimizing method [Schweizer (1999)]。此時機率測度 $\mathrm{Q}^{(0)}$ 為唯一和機率測度 P 正交(strongly orthogonal)的 ELLM (equivalent local martingale measure)，且如此的 $\mathrm{Q}^{(0)}$ 為所有的 ELLM 中，使得 $H_{(0)}(P,Q)$ 為最小的唯一解。

當 $q=1$ 時，$Q^{(1)}$ 稱為最小熵鞅測度(MEMM, minimal entropy martingale measure)，此機率測度 $Q^{(1)}$ 為滿足

$$\min H_{(1)}(P,Q)=\min E\{-M_T\ln(M_T)\}=\min E\{-\frac{dQ}{dP}\ln(\frac{dQ}{dP})\} \tag{4.4}$$

的唯一解。根據，在 $Q^{(1)}$ 的機率測度之下所計算出的金融商品價格，會逼近到”indifference utility pricing method”中風險趨避(risk-aversion)參數 $\gamma=0$ 時計算出的價格，其所對應的避險策略為無異效用避險法(indifference utility hedging method) [Frittelli (2000)]。

當 $q=2$, $Q^{(2)}$ 稱為最小變異鞅測度(VOMM, variance-optimal martingale measure)，其為 $\min H_{(2)}(P,Q)$ 的唯一解，其中

$$\min H_{(2)}(P,Q)=\min E\{2M_T^2\}=\min E\{2(\frac{dQ}{dP})^2\} \tag{4.5}$$

[Schweizer (1996)]證明在所有的 ELMM 之中，機率測度 $Q^{(2)}$ 對應到的避險策略為 mean-variance hedging strategy。

接下來，我們先對隨機波動模型下的機率測度轉換(change of measure)做討論:首先令 S 為股價，V 為波動率，在真實世界的機率測度(real world probability) P 之下，一般連續的隨機波動模型可以表示為

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t,V_t)dt + \sqrt{V_t}dB_t$$

$$dV_t = a(t,V_t)dt + b(t,V_t)dW_t \tag{4.6}$$

其中 $dW_t = \rho dB_t + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t$，$\rho$ 為兩布朗運動(Brownian motion) B_t 和 W_t 之間的相關係數。

將機率測度由 P 轉換到風險中立機率測度 Q 之下：

$$M_T \equiv \frac{dQ}{dP} = \exp(\int_0^T [-\omega dB_u - \frac{1}{2}\omega^2 du - \lambda_u(u,V_u)dZ_u - \frac{1}{2}\lambda_u(u.V_u)^2 du])$$

$$\omega = \frac{\alpha(u,V_u) - r}{\sqrt{V_t}} \tag{4.7}$$

其中

$$dB_t^Q = dB_t + \omega dt = dB_t + \frac{\mu(t,V_t) - r}{\sqrt{V_t}}dt$$

$$dZ_t^Q = dZ_t + \lambda(t,V_t)dt \tag{4.8}$$

$$dW_t^Q = \rho dB_t^Q + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t^Q = dW_t + \rho\frac{\mu(t,V_t) - r}{\sqrt{V_t}}dt + \sqrt{1-\rho^2}\lambda(t,V_t)dt$$

則在新的機率測度Q之下

$$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sqrt{V_t}dB_t^Q$$

$$dV_t=[a(t,V_t)-\rho\frac{\alpha(t,V_t)-r}{\sqrt{V_t}}b(t,V_t)-\sqrt{1-\rho^2}b(t,V_t)\lambda_t(t,V_t)]dt+b(t,V_t)dW_t^Q \tag{4.9}$$

其中的λ_t稱為波動率風險的市場價格(market value of volatility risk)。透過以上的轉換，股價的隨機過程都被轉換到風險中立機率測度之下，其報酬率期望值均為rdt。然而，透過不同的λ_t，在不同的機率測度Q之下，波動率隨機過程將會有所不同，也間接影響到股價的波動項$\sqrt{V_t}dB_t^Q$。

- **Heston model**

現在考慮在 Heston model 下的機率測度轉換，在真實世界機率測度P之下的股價模型為

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sqrt{V_t}dB_t$$

$$dV_t=k(\theta-V_t)dt+\beta\sqrt{V_t}dW_t \tag{4.10}$$

其中$dW_t=\rho dB_t+\sqrt{1-\rho^2}dZ_t$，透過風險中立機率測度$Q$轉換

$$M_T=\frac{dQ}{dP}=\exp(\int_t^T[-\omega dB_u-\frac{1}{2}\omega^2du-\lambda_u(u,V_u)dZ_u-\frac{1}{2}\lambda_u(u.V_u)^2du])$$

$$\omega=\frac{\mu-r}{\sqrt{V_t}} \tag{4.11}$$

其中

$$dB_t^Q = dB_t + \omega dt = dB_t + \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} dt$$

$$dZ_t^Q = dZ_t + \lambda^{(q)}(t, V_t) dt \tag{4.12}$$

$$dW_t^Q = \rho dB_t^Q + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t^Q = dW_t + \rho \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} dt + \sqrt{1-\rho^2} \lambda(t, V_t) dt$$

則此時在風險中立機率測度Q之下的 Heston model 為

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t} dB_t^Q$$

$$dV_t = \{k(\theta - V_t) - \rho(\mu - r)\beta - \sqrt{1-\rho^2} \lambda(t, V_t) \beta \sqrt{V_t}\} dt + \beta \sqrt{V_t} dW_t^Q \tag{4.13}$$

若考慮在不同的機率測度$Q^{(q)}$之下，則 Heston model 可寫為

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t} dB_t^{Q^{(q)}}$$

$$dV_t = \{k(\theta - V_t) - \rho(\mu - r)\beta - \sqrt{1-\rho^2} \lambda^{(q)}(t, V_t) \beta \sqrt{V_t}\} dt + \beta \sqrt{V_t} dW_t^{Q^{(q)}} \tag{4.14}$$

根據 Hobson(2004)，Henderson (2003) 等人證明結果，認為在$1 - q\rho^2 > 0$的條件之下，不同的機率測度$Q^{(q)}$之下適當的$\lambda_t^{(q)}$應該為

$$\lambda^{(q)}(t, V_t) = \sqrt{1-\rho^2} \beta \sqrt{V_t} F(T-t) \tag{4.15}$$

其中$F(T-t)$需滿足

$$F(T-t)=\frac{C}{A}\tanh(AC(T-t)+\tanh^{-1}(\frac{AB}{C}))-B$$

$$A^2=(1-q\rho^2)\beta^2$$

$$B=\frac{k+q\rho\beta\frac{\mu}{V_t}}{(1-q\rho^2)\beta^2}$$

$$C=\sqrt{\left|q\frac{\mu^2}{V_t^2}+\frac{(k+q\rho\beta\frac{\mu}{V_t})^2}{(1-q\rho^2)\beta^2}\right|} \tag{4.16}$$

當 $q=0,1,2$ 時，分別代入不同的 q 值，即可得到不同的 $\lambda_t^{(q)}$ 。

接下來計算歐式買權的價格。根據 Ito's Lemma：

$$d\ln S_t=(r-\frac{V_t}{2})dt+\sqrt{V_t}dB_t^Q \tag{4.17}$$

兩邊積分可得

$$\begin{aligned}&\ln\frac{S_T}{S_t}=r(T-t)-\int_t^T\frac{V_u}{2}du+\int_t^T\sqrt{V_u}dB_u^Q\\&S_T=S_t\exp[r(T-t)-\int_t^T\frac{V_u}{2}du+\int_t^T\sqrt{V_u}dB_u^Q]\end{aligned} \tag{4.18}$$

則歐式買權可以表示成

$$\begin{aligned}C_t^Q&=e^{-r(T-t)}E^Q[(S_T-K)^+]\\&=e^{-r(T-t)}E^Q[(S_t\exp(r(T-t)-\int_t^T\frac{V_s}{2}ds+\int_t^T\sqrt{V_s}dB_s^Q)-K)^+]\\&=e^{-r(T-t)}E^Q[(S_te^{r(T-t)}\exp(x)-K)^+]\end{aligned} \tag{4.19}$$

其中給定條件在V_t已知的情況下，我們有一可由$v=\int_t^T V_s ds$表示的常態分配x，定義如下：

$$x \equiv -\int_t^T \frac{V_s}{2} ds + \int_t^T \sqrt{V_s} dW_s^Q \sim N(-\frac{v}{2}, v) \tag{4.20}$$

因此，若知道在Q之下的$v=\int_t^T V_u du$行為，則C_t可利用下式計算求得：

$$C_t^Q = S_t E^Q[N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}}) | V_t] - Ke^{-r(T-t)} E^Q[N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}}) | V_t] \tag{4.21}$$

在不同的機率測度$Q^{(q)}$之下，歐式買權的價格則表示成

$$C_t^{Q^{(q)}} = S_t E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}}) | V_t] - Ke^{-r(T-t)} E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}}) | V_t] \tag{4.22}$$

其中的$E^{Q^{(q)}}$為$Q^{(q)}$機率測度之下的期望值。在不同的$Q^{(q)}$機率測度之下，得到的$\lambda^{(q)}$值不同，變異數隨機過程(variance process) dV_t亦不同，因而$E^{Q^{(q)}}$計算求出的歐式買權價格也就不同。

利用類似的方法，可以計算出歐式賣權在不同$Q^{(q)}$機率測度之下的值

$$P_t^{Q^{(q)}} = Ke^{-r(T-t)} E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}}) | V_t] - S_t E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}}) | V_t] \tag{4.23}$$

接下來討論利用傅立葉轉換，在 Heston model 之下計算歐式買權的價格，並和(4.22)的結果做比較：根據 Peter Carr 等人(1998)的論文，在風險中立機率測度Q之下，對於到期時間T，履約價格為K的歐式買權，此時歐式買權的價格可以表示為

$$C_t^Q = e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T - K)^+] = e^{-r(T-t)} E^Q[(e^{s_T} - e^k)^+]$$
$$= \int_k^{\infty} e^{-r(T-t)} (e^s - e^k) q_{T-t}(s) ds \tag{4.24}$$

其中 $s = \ln S_T$，$k = \ln K$，$q_T(s)$ 為 s (log-price of the underlying asset)在風險中立機率測度 Q 下的機率密度函數，令 $\phi_T(x)$ 為 X_T 的特徵函數(characteristic function)

$$\phi_T(x) = \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^{ixs} ds \tag{4.25}$$

根據傅立葉轉換的步驟：先將歐式買權價格乘上一適當的數 $e^{\alpha k}$，成為另一個「修正歐式買權價格(modified European call option price)」

$$c_t^Q(k) = e^{\alpha k} C_t^Q(k) \tag{4.26}$$

接著定義「修正歐式買權價格」的傅立葉轉換函數 $\psi_T(v)$ 為

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} c_t^Q(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} e^{\alpha k} C_t^Q(k) dk$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} e^{\alpha k} \int_k^{\infty} e^{-r(T-t)} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk \tag{4.27}$$

其中 $\psi_T(v)$ 可以計算成

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} e^{(1+\alpha+iv)s} \left(\frac{1}{(\alpha + iv)(1 + \alpha + iv)}\right) q_T(s) ds \tag{4.28}$$

則歐式買權的價格 $\mathrm{C}_t^Q(k)$ 可以利用 $\psi_T(v)$ 的反轉換 (inverse transform)表示成

$$\mathrm{C}_t^Q(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv$$
$$= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ivk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} e^{(1+\alpha+iv)s} \left(\frac{1}{(\alpha + iv)(1 + \alpha + iv)}\right) q_T(s) ds dv \tag{4.29}$$

利用(4.29)計算出的結果，即為在風險中立測度之下的歐式買權價格。在不同的

機率測度$Q^{(q)}$下，則可得到不同的機率密度函數$q_T(s)$，因此計算出的歐式買權價格也就不盡相同。

Bates model

在真實世界的機率測度P之下，根據 Bates (1996)定義的 Bates model

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sqrt{V_t}dB_t + (Y-1)\mathrm{dN_t} \\
dV_t &= k(\theta - V_t)dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

其中$dW_t = \rho dB_t + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t$，$Y-1$為跳躍項(jump diffusion)的振幅大小，服從 lognormal 分配；dN_t為跳躍項出現的頻率，服從 Poisson 分配，且和dW_t獨立：

$$
\begin{aligned}
&(Y-1) \sim \log normal(\hat{\mu}, \sigma^2) \\
&dN_t \sim Poisson(\hat{\lambda})
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

透過機率測度轉換[參考 El-Khatib (2000)]，

$$
\begin{aligned}
M_T &= \frac{dQ}{dP} \\
&= \exp\{\int_t^T [-\omega dB_u - \frac{1}{2}\omega^2 du - \lambda_u^{(q)}(u,V_u)dZ_u - \frac{1}{2}\lambda_u^{(q)}(u.V_u)^2 du]\} \\
&\quad \cdot \exp\{\int_t^T \ln(1-\eta)dN_u + \int_t^T \hat{\lambda}(\ln(1-\eta)+\eta)ds\}
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

其中

$$dB_t^{Q^{(q)}} = dB_t + w(t,V_t)dt$$

$$dZ_t^{Q^{(q)}} = dZ_t + \lambda^{(q)}(t,V_t)dt$$

$$dN_t^{Q^{(q)}} = dN_t \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} dW_t^{Q^{(q)}} &= \rho dB_t^Q + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t^Q = \rho(dB_t + wdt) + \sqrt{1-\rho^2}(dZ_t + \lambda^{(q)}dt) \\ &= dW_t + (\rho w + \sqrt{1-\rho^2}\lambda^{(q)})dt \end{aligned}$$

則在$Q^{(q)}$機率測度之下，Bates model 可改寫為

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= [\mu - w\sqrt{V_t}]dt + \sqrt{V_t}dB_t^{Q^{(q)}} + (Y-1)dN_t^{Q^{(q)}} \\ dV_t &= [k(\theta - V_t) - \rho w\beta\sqrt{V_t} - \sqrt{1-\rho^2}\lambda^{(q)}\beta\sqrt{V_t}]dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t^{Q^{(q)}} \end{aligned} \tag{4.34}$$

為了使其轉換到風險中立機率測度下，因此w必須滿足

$$\mu - w\sqrt{V_t} = r - \hat{\mu}\hat{\lambda} \Rightarrow w = \frac{\mu - r + \hat{\mu}\hat{\lambda}}{\sqrt{V_t}} \tag{4.35}$$

使得

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (r - \hat{\mu}\hat{\lambda})dt + \sqrt{V_t}dB_t^{Q^{(q)}} + (Y-1)dN_t^{Q^{(q)}} \\ dV_t &= [k(\theta - V_t) - \rho w\beta\sqrt{V_t} - \sqrt{1-\rho^2}\lambda^{(q)}\beta\sqrt{V_t}]dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t^{Q^{(q)}} \end{aligned} \tag{4.36}$$

透過如此的機率測度轉換，則可得到 Bates model 下的最適q測度，進而可求得在不同的機率測度$Q^{(q)}$下金融商品的價格。

從方程式(4.36)中，利用 Ito’s Lemma：

$$d\ln S_t = (r - \frac{V_t}{2} - \hat{\mu}\hat{\lambda})dt + \sqrt{V_t}\,dB_t^Q + [(Y-1) - \frac{(Y-1)^2}{2} + \frac{(Y-1)^3}{3} - \cdots]dN_t^Q \qquad (4.37)$$

其中

$$A = (Y-1) - \frac{(Y-1)^2}{2} + \frac{(Y-1)^3}{3} - \frac{(Y-1)^4}{4} + \cdots = \int \frac{1}{Y}dY = \ln Y$$
$$\frac{\partial A}{\partial Y} = 1 - (Y-1) + (Y-1)^2 - (Y-1)^3 + \cdots = \frac{1}{1-[-(Y-1)]} = \frac{1}{Y} \qquad (4.38)$$

所以

$$d\ln S_t = (r - \frac{V_t}{2} - \hat{\mu}\hat{\lambda})dt + \sqrt{V_t}\,dB_t^Q + \ln Y \cdot dN_t^Q \qquad (4.39)$$

分別對兩邊積分

$$\ln\frac{S_T}{S_t} = (r - \hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t) - \int_t^T \frac{V_s}{2}ds + \int_t^T \sqrt{V_s}\,dB_s^Q + \ln Y \cdot N_{T-t}^Q$$
$$S_T = S_t Y^{N_{T-t}} \exp[(r - \hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t) - \int_t^T \frac{V_s}{2}ds + \int_t^T \sqrt{V_s}\,dB_s^Q] \qquad (4.40)$$

歐式買權的價格可以用類似(4.19)的方式計算得

$$C_t^Q = e^{-r(T-t)}E^Q[(S_T - K)^+]$$
$$= e^{-r(T-t)}E^Q[(S_t Y^{N_{T-t}} \exp[(r - \hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t) - \int_t^T \frac{V_s}{2}ds + \int_t^T \sqrt{V_s}\,dB_s]) - K)^+] \qquad (4.41)$$
$$= e^{-r(T-t)}E^Q[(S_t Y^{N_{T-t}} e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)} \exp(x) - K)^+]$$

給定V_t，同樣我們有常態分配

$$x=-\int_t^T \frac{V_s}{2}ds+\int_t^T \sqrt{V_s}dW_s^Q \sim N(-\frac{v}{2},v)$$
$$v=\int_t^T V_s ds \tag{4.42}$$

因此

$$\mathrm{C}_t^Q=S_t e^{-\hat{\mu}\hat{\lambda}(T-t)}E^Q[\sum_{N_{T-t}=1}^{\infty}Y^{N_{T-t}}N(\frac{\ln\frac{S_tY^{N_{T-t}}e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})\frac{e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^{N_{T-t}}}{N_{T-t}!}|V_t]$$
$$-Ke^{-r(T-t)}N(\frac{\ln\frac{S_tY^{N_{T-t}}e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})|V_t] \tag{4.43}$$

在不同的$Q^{(q)}$機率測度下，歐式買權的價格可以表示成

$$\mathrm{C}_t^{Q^{(q)}}=S_t e^{-\hat{\mu}\hat{\lambda}(T-t)}E^{Q^{(q)}}[\sum_{N_{T-t}=1}^{\infty}Y^{N_{T-t}}N(\frac{\ln\frac{S_tY^{N_{T-t}}e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})\frac{e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^{N_{T-t}}}{N_{T-t}!}|V_t]$$
$$-Ke^{-r(T-t)}E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{S_tY^{N_{T-t}}e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})|V_t] \tag{4.44}$$

同樣的，在不同的$Q^{(q)}$機率測度下，歐式賣權的價格可以表示成：

$$P_t^{Q^{(q)}}=e^{-r(T-t)}E^{Q^{(q)}}[K\sum_{X_{T-t}=1}^{\infty}N(\frac{\ln\frac{K}{S_tY^{\mathrm{N}_{T-t}}e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})|V_t]$$
$$-S_te^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}E^{Q^{(q)}}[\sum_{X_{T-t}=1}^{\infty}Y^{\mathrm{N}_{T-t}}N(\frac{\ln\frac{K}{S_tY^{\mathrm{N}_{T-t}}e^{(r-\hat{\mu}\hat{\lambda})(T-t)}}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})\frac{e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^{\mathrm{N}_{T-t}}}{\mathrm{N}_{T-t}!}|V_t] \tag{4.45}$$

- **對應的避險策略**

在不同的機率測度之下，對應到的避險策略也不相同。我們討論各種機率測度$Q^{(0)},Q^{(1)},Q^{(2)}$下的避險策略，並且利用之前計算出的歐式買權價格，實際計算出最適策略下應該持有的選擇權單位數量。

在機率測度$Q^{(0)}$的情況下，股價模型如下：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t}\,dB_t^Q \\
&dV_t = \{k(\theta - V_t) - \rho(\mu - r)\beta - \sqrt{1-\rho^2}\,\lambda^{(0)}(t,V_t)\beta\sqrt{V_t}\}dt + \beta\sqrt{V_t}\,dW_t^Q \\
&\quad = \{k(\theta - V_t) - \rho(\mu - r)\beta - \sqrt{1-\rho^2}\,\beta\sqrt{V_t}\}dt + \beta\sqrt{V_t}\,dW_t^Q
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

最適當的避險策略稱為“locally risk-minimizing method”。在 Follmer (1990)的研究中，假設存在一投資組合，包含買進一單位歐式買權及賣出Δ單位股票，定義dX為投資組合價值的變化：

$$
dX = dC - \Delta dS = C_s dS + C_V dV - \Delta dS = (C_s - \Delta)dS + C_V dV \tag{4.47}
$$

其中由於

$$
Cov(dS,dV) = E[\rho\beta V_t dt] - rdt\cdot k(\theta - V_t)dt = \rho\beta V_t dt \tag{4.48}
$$

$Var(dX)$可以被計算為

$$
\begin{aligned}
Var(dX) &= Var((C_s - \Delta)dS_t + C_V dV) \\
&= (C_s - \Delta)^2 Var(dS_t) + C_V^2 Var(dV) + 2(C_s - \Delta)C_V Cov(dS,dV) \\
&= \{(C_s - \Delta)^2 + C_V^2\beta^2 + 2(C_s - \Delta)C_V\beta\rho\}V_t dt
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

解$\min Var(dX)$，

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}Var(dX)=\frac{\partial}{\partial\Delta}\{(C_s-\Delta)^2+C_V^2\beta^2+2(C_s-\Delta)C_V\beta\rho\}V_t dt$$
$$=\{-2(C_s-\Delta)-2C_V\beta\rho\}V_t dt=0 \tag{4.50}$$

因此，在機率測度$Q^{(0)}$之下，Δ可以被表示成

$$\Delta^{(0)}=C_S^{(0)}+\rho\frac{\beta}{S_t}C_V^{(0)} \tag{4.51}$$

其中C為機率測度$Q^{(0)}$之下的歐式買權價格，因此

.

$$\Delta^{(0)}=C_S^{(0)}+\rho\frac{\beta}{S_t}C_V^{(0)}$$

$$=E^{Q^{(0)}}[N(d_1)]+\frac{1}{\sqrt{v}}E^{Q^{(0)}}[N'(d_1)]-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t\sqrt{v}}E^{Q^{(0)}}[N'(d_2)] \tag{4.52}$$
$$+\rho\frac{\beta}{S_t}(\frac{-1}{2v})(T-t)\{d_2S_tE^{Q^{(0)}}[N'(d_1)]-d_1Ke^{-r(T-t)}E^{Q^{(0)}}[N'(d_2)]\}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S_te^{r(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}},d_2=\frac{\ln\frac{S_te^{r(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}} \tag{4.53}$$

在機率測度$Q^{(1)}$的情況下，最佳的避險策略為無異效用避險(indifference utility hedging method) [Becherer 等人(2001)]，假設投資人的效用函數為一指數函數(exponential function)

$$u(x)=e^{\gamma X_T}=e^{\gamma(x+\int_t^T H_s dS_s)} \tag{4.54}$$

其中γ為風險趨避參數(risk-aversion parameter)，X_T為到期時的投資組合價值，$X_T=x+\int_t^T H_s dS_s$，s為任意時點，$t<s<T$，x為初始的投資組合價值，H_s為股票持有的單位數。亦即在任意時間點，投資人持有的資產為H_s單位的股票以及$e^{rs}(X_s-H_sS_s)$單位的無風險資產。對投資者而言，假設其目標為追求到期時

的效用極大化，即

$$Max[u(x)] = \sup_{H\in A} E[e^{\gamma(x+\int_t^T H_s dS_s)}] \quad (4.55)$$

若考慮一歐式買權 C ，價格為 π_C ，且 π_C 滿足

$$\sup_{H\in A} E[e^{\gamma(x+\int_t^T H_s dS_s)}] = \sup_{H\in A} E[e^{\gamma(x+\int_t^T H_s dS_s - C + \pi_C)}] \quad (4.56)$$

亦即最適的投資策略應該滿足 $u'(x) = 0$ ，即

$$H_s \frac{dQ^{(q)}}{dP} = \gamma e^{-\gamma(x+\int_s^T HsdS_s)} \quad (4.57)$$

解(4.57)式得到的最後結果為[Becherer(2004)]

$$H_s = \frac{\partial C_s}{\partial S_s} + \rho \frac{\beta}{S_s} \frac{\partial C_s}{\partial V_s} + \frac{(\mu - r)}{\gamma S_s V_s} \quad (4.58)$$

其中 C_s 為歐式買權的價格。類似(4.52)，可以得到

$$\begin{aligned}\xi &= E^{Q^{(1)}}[N(d_1)] + \frac{1}{\sqrt{v}} E^{Q^{(1)}}[N'(d_1)] - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t\sqrt{v}} E^{Q^{(1)}}[N'(d_2)] \\ &\quad + \rho \frac{\beta}{S_t} (\frac{-1}{2v})(T-t)\{d_2 S_t E^{Q^{(1)}}[N'(d_1)] - d_1 K e^{-r(T-t)} E^{Q^{(1)}}[N'(d_2)]\} + \frac{(\mu - r)}{\gamma SV}\end{aligned} \quad (4.59)$$

6. 實證模擬

我們實證模擬比較歐式買權價格、變異數交換價格、並對避險策略避險的誤差做比較。在不同的機率測度 $Q^{(q)}$ 之下，給定參數如下：

$$\begin{aligned}&r = 0.04,\ \mu = 0.10,\ \theta = 0.0483,\ k = 4.75,\ \beta = 0.55,\ \rho = -0.569,\ S_t = 100 \\ &K = S_t e^{r(T-t)} = 100e^{0.04} \approx 104\end{aligned} \quad (4.60)$$

在不同的機率測度 $Q^{(q)}$ 下，代入上式參數，可以得到不同的 $\lambda_t^{(q)}$ ：

$$\lambda^{(0)}(t,V_t)=0,\ \lambda^{(1)}(t,V_t)=0.0511,\ \lambda^{(2)}(t,V_t)=0.1205 \tag{4.61}$$

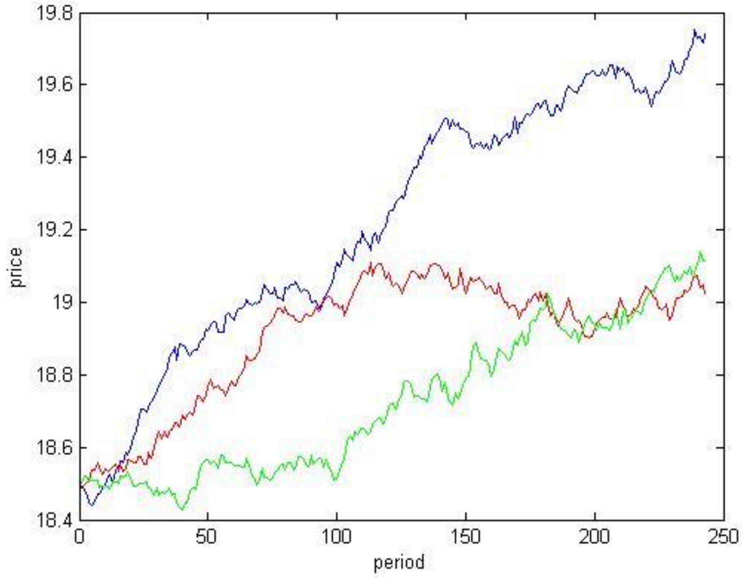
利用得到的$\lambda_t^{(q)}$，代回股價走式模型，模擬出不同機率測度Q(q)之下，一年(252個交易日)的歐式買權價格走勢。模擬方式如下：

Step1. 先模擬出一個變異數過程，並計算$v=\int_t^T V_s dS$。

Step2. 把v代入歐式買權公式中的常態分配項，即$N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})$和$N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})$

Step3. 重複 Step1 和 Step2 萬次，取所有$N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})$和$N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})$的平均值，即可算出$E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}+\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})|V_t]$和$E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\ln\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}-\frac{v}{2}}{\sqrt{v}})|V_t]$

考慮在履約價格$K=104$的情況下，不同的機率測度Q(q)下所得到的歐式買權價格走勢圖：

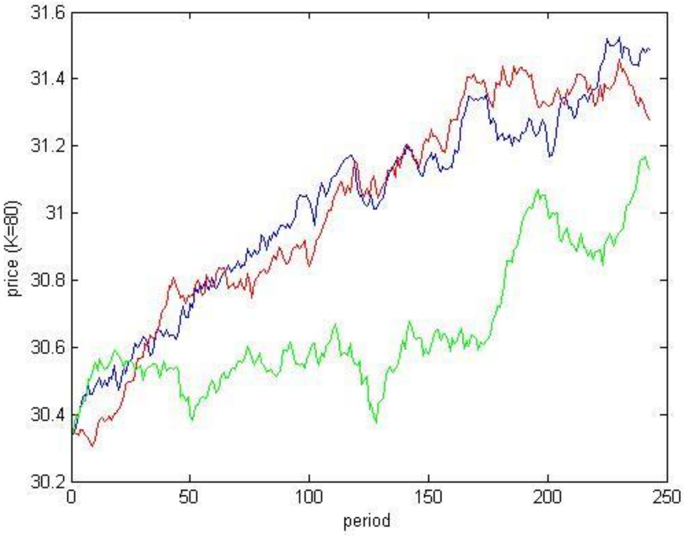


(圖一)

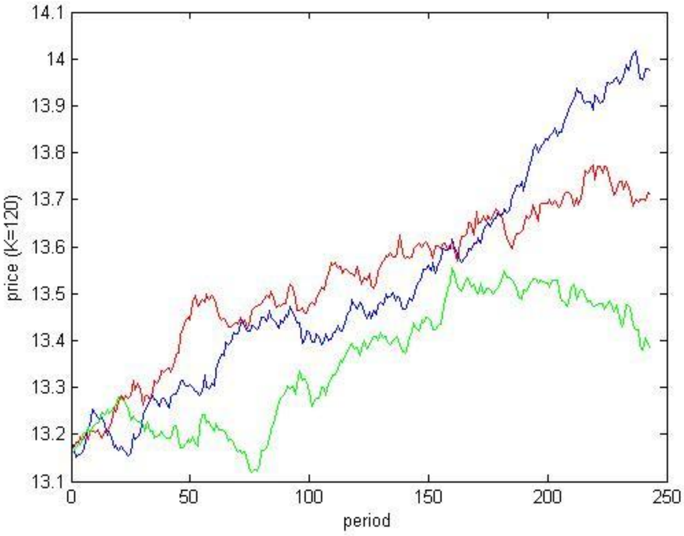
橫軸為時間，從$T=0$到$T=252$，縱軸則為歐式買權價格，其中藍線為機率測度$Q^{(0)}$下的歐式買權價格，紅線為$Q^{(1)}$，綠線為$Q^{(2)}$。我們可以觀察到當q值較小時，歐式買權的價格大致上也相對較小。這是由於當$K=S_t e^{r(T-t)}$時，歐式買權價格公式可以被化簡為

$$C_t^{Q^{(q)}}=S_t\{E^{Q^{(q)}}[N(\frac{\sqrt{v}}{2})|V_t]-E^{Q^{(q)}}[N(-\frac{\sqrt{v}}{2})|V_t]\} \tag{4.62}$$

當q值越小，v值的期望值越大，因此歐式買權價格$C_t^{Q^{(q)}}$也就較大。但若考慮$K>S_t e^{r(T-t)}$或$K<S_t e^{r(T-t)}$的情況，則較不易明顯判定q值大小對歐式買權價格$C_t^{Q^{(q)}}$的影響。底下分別以$K=80$和$K=120$為例，在不同的機率測度下得到的歐式買權價格：

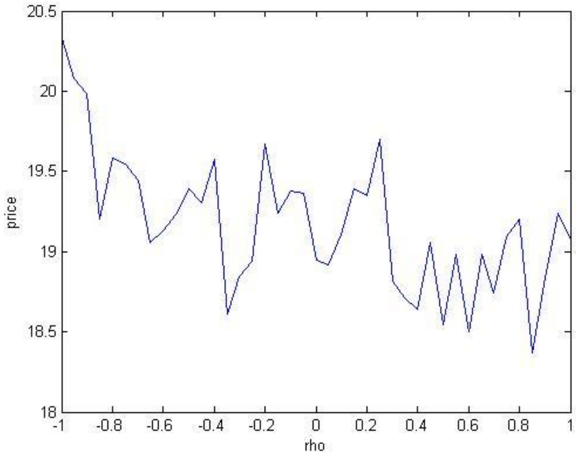


(圖二)

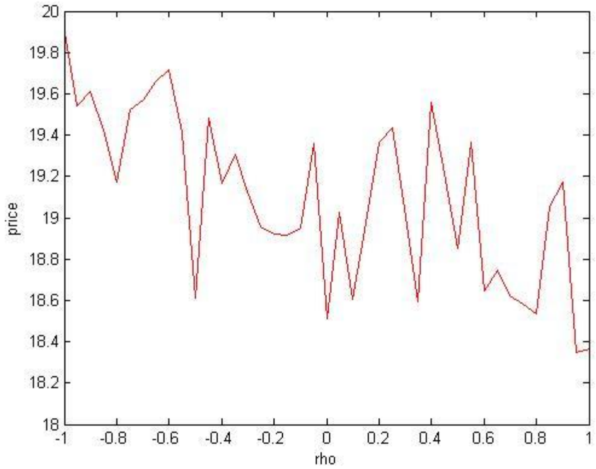


(圖三)

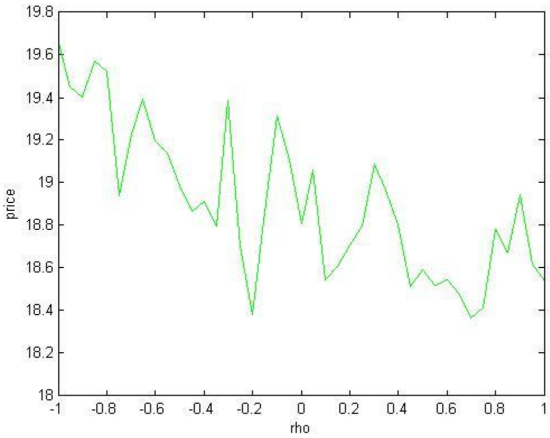
接下來考慮不同相關係數ρ對歐式買權價格的影響：


20.5
20
19.5
19
18.5
18
price
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
rho

(圖四)


20
19.8
19.6
19.4
19.2
19
18.8
18.6
18.4
18.2
18
price
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
rho

(圖五)

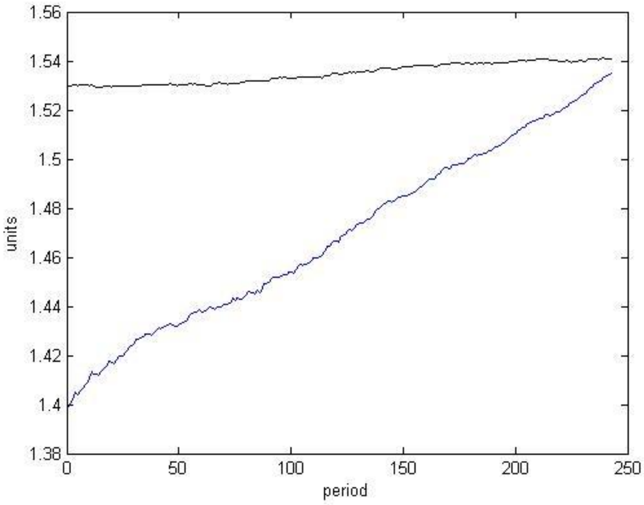

19.8
19.6
19.4
19.2
19
18.8
18.6
18.4
18.2
18
price
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
rho

(圖六)

圖四至圖六分別為在機率測度$Q^{(0)}$、$Q^{(1)}$、$Q^{(2)}$下的價格走勢圖：橫軸為兩布朗運動間的相關係數ρ，縱軸為歐式買權價格。由上圖可知，當$\rho=-1$時歐式買權價格最高，隨著ρ越接近一，歐式買權的價格走勢大致上也越低。

不同機率測度下的避險效果比較

在機率測度$Q^{(0)}$下，根據 Schweizer (1999)的論文，最適的避險策略稱為“locally risk-minimizing method”，其投資組合為買進一單位歐式買權以及賣出$\Delta^{(0)}$單位股票。下圖表示隨著時間逐漸接近到期日的Δ變化過程，並和一般的Δ避險(delta hedge，$\Delta=\dfrac{\partial C}{\partial S}$)做比較：

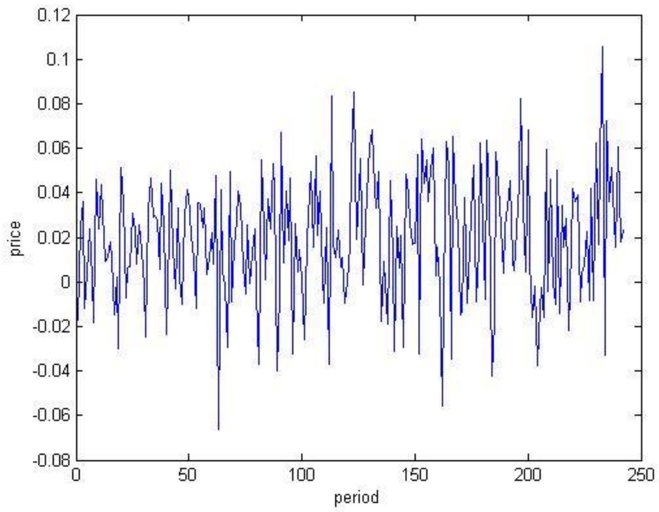


(圖七)

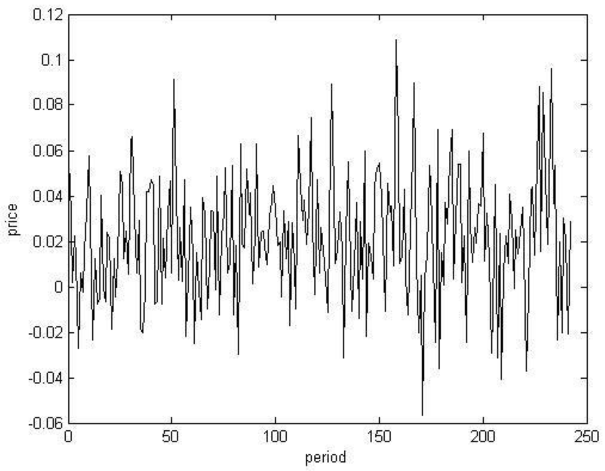
圖七中黑色線為Δ避險的歐式買權持有單位，藍色線為機率測度$Q^{(0)}$下的歐式買權持有單位。為比較其避險效果，定義避險誤差(hedge error)如下：

$$error_s = dC_s - \Delta_s dS_s \tag{4.63}$$

分別計算每一期的避險誤差(error)，畫圖比較兩者的結果如下圖：



(圖八)



(圖九)

圖八和圖九分別為“locally risk-minimizing method”和Δ避險的避險誤差。

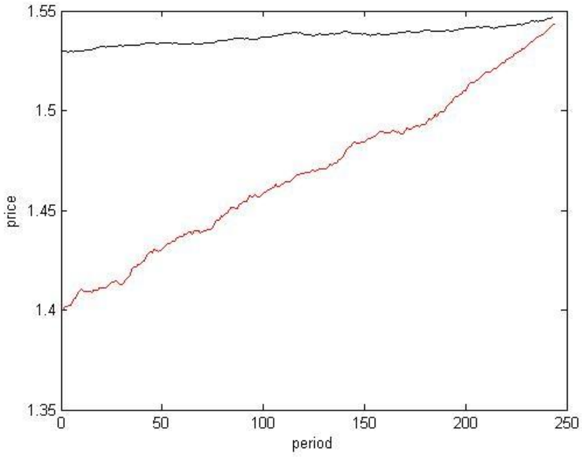
計算兩者「避險誤差絕對值」的平均數和變異數，比較如下：

$\lvert error_s \rvert$	$ave(\lvert error_s \rvert)$	$\mathrm{var}(\lvert error_s \rvert)$
locally risk-minimizing method	0.0261	4.6519×10^{-4}
Δ hedge method	0.0280	5.1524×10^{-4}

(表一)

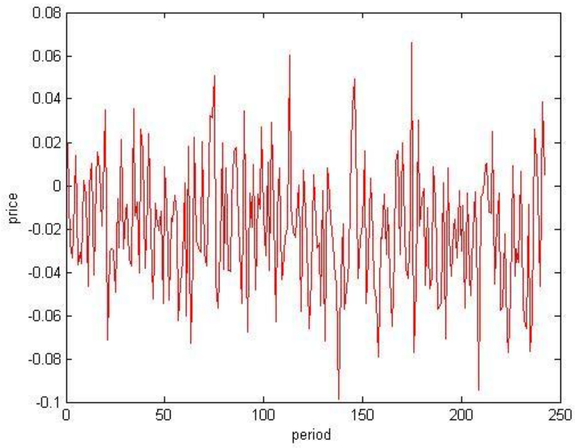
兩者比較過後可以發現，"locally risk-minimizing method"的避險效果比Δ避險佳，且"locally risk-minimizing method"需持有的歐式買權單位數較少，亦即避險成本較低。整體而言，"locally risk-minimizing method"顯著優於Δ避險。

接下來，考慮機率測度 $Q^{(1)}$ 之下的避險策略"indifference utility hedging method"，其最適避險策略為持有 H 單位歐式買權以及一單位股票，從(4.59)式中得到 H 過程表示如下，並與一般的Δ避險做比較：

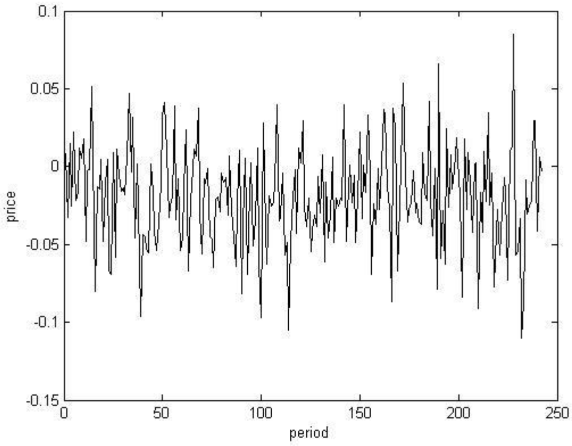


(圖十)

其中黑線為一般Δ避險下的 H 過程，綠線則為"indifference utility hedging method"下的 H 過程。同樣比較兩者的避險誤差並表示如下：



(圖十一)



(圖十二)

圖十一和圖十二分別為 indifference utility hedging method 和Δ避險的避險誤差。

計算兩者「避險誤差絕對值」的平均數和變異數，表示如下：

$\lvert error_s \rvert$	$ave(\lvert error_s \rvert)$	$\mathrm{var}(\lvert error_s \rvert)$
indifference utility hedging method	0.0266	4.0108×10^{-4}
Δ hedge method	0.0284	4.5414×10^{-4}

(表二)

兩者比較過後可以發現，indifference utility hedging method 的避險效果比Δ避險佳，且 indifference utility hedging method 需持有的歐式買權單位數較少，因此避險成本也較低。整體而言，indifference utility hedging method 亦顯著優於Δ避險。

結論

在不完全市場的假設下，由於投資者對風險的看法不同，對於金融商品的價格決定也不同。運用在定價模型上，由於 EMM 不唯一，因此可以被用來定價的風險中立機率測度 $Q^{(q)}$ 亦不唯一，決定出的價格也就有所不同。

不僅是定價方式，對於不同的機率測度 $Q^{(q)}$，所對應的避險策略也有所不同。運用 locally risk-minimizing method、Indifference utility hedging method 等策略，得到的避險誤差不但優於Δ避險，且可以降低避險時所需的成本。因此，利用不

同的機率測度$Q^{(q)}$所對應的避險策略來避險，透過實證的確可以證明發現其效果顯著優於Δ避險。

本文主要是在討論給定q值的條件下，計算出不同的歐式買權等衍生性商品價格。未來的研究方面，也許可以透過較正式的參數估計，估計出準確的參數，並且由市場上得到的歐式買權價格，反推找出究竟哪一個機率測度$Q^{(q)}$會比較接近實際上的市場表現。亦或是在機率測度$Q^{(q)}$選取方面，除了$q = 0,1,2$之外，也許仍然存在其他具特殊經濟意義的機率測度可以被選取。如果多考慮幾個不同的q值，或許可以利用這些$Q^{(q)}$機率測度下求出的選擇權價格，取其最大最小值，找出一個價格區間。當觀察到市場上的選擇權價格高於或低於此區間，則可以判斷市場上的價格被高估或低估，藉此做為判斷買進或賣出的依據，或許是個可供參考的交易訊號。

五. 參考文獻

[1] D. Bates (1996), “Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options”, Review of Financial Studies, 9, page 69-107

[2] D. Bates (1998), “Pricing Option under Jump-Diffusion Process”, Finance department, The Wharton School University of Pennsylvania Philadelphia, PA 19104-6367, page 37-88

[3] D.Becherer (2003), “Rational Hedging and Valuation of Integrated Risks under Constant Absolute Risk Aversion”, Insurance: Mathematics and Economics, 33, page 1–28

[4] D.Becherer, (2004), “Utility-Indifference Hedging and Valuation via Reaction Diffusion Systems”, Proceedings of The Royal Society, Series A, 460, page 27–51.

[5] F. Biagini, P. Guasoni and M. Pratelli (2000), ”Mean-variance hedging for stochastic volatility models”, Mathematical Finance 10(2), page 109-123

[6] S. Borak, K. Detlefsen and W. Hardle (2005), “FFT-based Option Pricing”, Sonderforschungsbereich 649, Humboldt University, Berlin, Germany in its series SFB 649 Discussion Papers with number SFB649DP2005-011

[7] P. Carr and D. Madan (1998), “Option Valuation Using the Fourier Transform, Journal of Computational Finance, No.2, page 61-78

[8] P. Carr and D. Madan (1998), “Towards a Theory of Volatility Trading”, in Risk Book on Volatility, New York, page 417-427

[9] F. Delbaen, W. Schachermayer, (1994), A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. Math. Annalen, Vol. 300, page 463–520.

[10] K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal and J. Zou (1999), “A Guide to Variance Swaps”, RISK 12(6), page 54-59
[11] D. Duffie, J. Pan, and K. Singleton (2000), “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions”, Econometrica, 68, page 1343-1376
[12] Y. El-Khatib, (2006), “Hedging Discontinuous Stochastic Volatility Models”, arXiv:math/0603527v1 [math.PR].
13] H. Follmer, M. Schweizer (1990), “Hedging of contingent claims under incomplete information”, Gordon and Breach, London, page 389-414
[14] M. Frittelli, (2000), ”The Minimal Entropy Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets”, Math, Finance 10, page 39-52
[15] P. Grandits and L. Krawczyk (1998), “Closeness of some Spaces of Stochastic Integrals”, Seminaire de Probabilites, XXXII, Lecture Notes in Math., 1686, Springer, Berlin, page 73–85
[16] R. Grasselli and T. Hurd (2007), “Indifference pricing and hedging for volatility derivatives”, Applied Mathematical Finance, 14(4), page 303-317
[17] P. Guasoni and F. Biagini (2002), “Mean-variance hedging with random volatility jumps”, Stochastic analysis and applications 20(3), page 471-494
[18] M. Harrison and S. Pliska (1981), “Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading”, Stoch. Proc. & Appl., Vol. 11, page. 215–260.
[19] V. Henderson, D. Hobson, S. Howison and T. Kluge, (2005), “A Comparison of q-optimal option prices in a Stochastic Volatility Model with correlation”, Review of Derivatives Research 8 page.5-25.
[20] S. Heston (1993), “A closed from solution for option with stochastic volatility with applications to bond and currency options”, The Review of Financial Studies 6(2), page 327-343
[21] D. Hobson (2004), “Stochastic Volatility models, Correlation, and the q -Optimal Measure”, Mathematical Finance, 14, page 537-556
[22] J. Hull, A. White (1987), “The pricing of Options with Stochastic Volatility”, Journal of Finance, 42, page 281-300
[23] S. Lan (1997), "Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods." Mathematical Finance, 7, page 413-426
[24] A. Lim (2005), “Mean-variance hedging when there are jumps”, SIAM Journal on Control and Optimization, pages 1893-1922
[25] R. Merton (1976), “Options Pricing when Underlying Returns are Discontinuous”, journal of Financial Economics, 4, page 124-144
[26] P. Protter, (1990), Stochastic integration and differential equations. A new approach. Springer-Verlag, Berlin.

[27] F. Rouah, G. Vainberg (2007), “Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA”, chapter 5, page 136-162
[28] D. Satyajit (2002), “The Surprise Element: Jumps in Interest Rates”, Journal of Econometrics, 106, page 27-65
[29] M. Schweizer (1999), “A minimality property of the minimal martingale measure”, Statistics and Probability Letters 42(1), page 27-31
[30] M. Schweizer (1996), “Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure”, The Annals of Probability, 24(1), page 206-236

明新科技大學 97 年度 研究計畫執行成果自評表

<table>
<tr><td colspan="3">計畫類別：☐任務導向計畫 ☐整合型計畫 ☑個人計畫
所屬院(部)：☐工學院 ☑管理學院 ☐服務學院 ☐通識教育部
執行系別：財務金融系(中心)
計畫主持人：陳佳信 職稱：助理教授
計畫名稱：跳躍擴散隨機波動模型的衍生性商品定價與避險策略研究
計畫編號：MUST-97-財金-01
計畫執行時間：97 年 1 月 1 日 至 97 年 9 月 30 日</td></tr>
<tr><td rowspan="2">計畫執行成效</td><td>教學方面</td><td>1. 對於改進教學成果方面之具體成效：
對財務工程、財務數學、衍生性金融商品創新與定價相關授課有很大幫助。
2. 對於提昇學生論文/專題研究能力之具體成效：
熟悉近幾年來跳躍擴散隨機波動模型的衍生性商品定價與避險策略及半鞅過程在衍生性商品定價之應用計算，提昇專題研究能力。
3. 其他方面之具體成效： 開授研究所[衍生性金融商品][新金融商品創新][財務數學][財務工程]等相關課程助益甚大。</td></tr>
<tr><td>學術研究方面</td><td>1. 該計畫是否有衍生出其他計畫案 ☑是 ☐否
計畫名稱：不完備市場衍生性商品定價與避險策略
2. 該計畫是否有產生論文並發表 ☐已發表 ☑預定投稿/審查中 ☐否
發表期刊(研討會)名稱：
發表期刊(研討會)日期：____年___月___日
3. 該計畫是否有要衍生產學合作案、專利、技術移轉 ☐是 ☐否
尚未，但有研究計劃構想持續發展中，希望近期可與金融界有產學合作案，但因距台北金融機構較遠，雖計劃內容為國際熱門領域，但工具較艱深，仍待努力。</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">成果自評</td><td>計畫預期目標：100%達成。我們研究衍生性金融商品(例如選擇權)的定價與避險策略一些主要問題如證券價格報酬與波動行為，比較探討不同風險觀點下所對應不同選取等價鞅方法，應用 Fourier 轉換及特徵函數技巧的衍生性商品定價計算定價時不同避險策略與最佳等價鞅選取的比較。
計畫執行結果：理論與實證皆 100%達成。</td></tr>
<tr><td>其它具體成效：
首先根據最適 q 測度的定義，在不同機率測度 $Q^{(q)}$ 下決定出適當的布朗運動移動項(drift term)，透過機率測度轉換，將模型轉換到最適的等價鞅。接下來在不同 $Q^{(q)}$ 機率模型下，分別計算出不同情況下的歐式買權(European call option)價格，比較不同機率測度 $Q^{(q)}$ 下不同的價格。並且考慮在各自的機率測度 $Q^{(q)}$ 下，利用其對應的適當避險策略，找出最適避險策略下應持有的股票單位及選擇權單位比例關係。最後，利用實證模擬，比較不同 $Q^{(q)}$ 機率測度下的定價、避險策略和避險效果的優劣等。</td></tr>
</table>